

# Clapping music

Steve Reich, 1972

Libera interpretazione matematica a cura di Nicola Linty, maturata durante il festival "Musica e/è scienza", Padova, 20-22 aprile 2018, con il coro PoliEtnico del Politecnico di Torino.

## Introduzione

*Clapping Music* è un brano minimalista composto da Steve Reich nel 1972. La composizione è basata su una sequenza base di impulsi, riportata in Figura 1. Tale sequenza viene eseguita da due gruppi distinti con delle regole di ripetizione differenti. Mentre il gruppo 'A' ripete sempre la sequenza identica, il gruppo 'B' elimina la croma finale, evidenziata in rosso nella figura, ogni 4 ripetizioni. In tal modo, i due gruppi sono sincronizzati per le prime 4 ripetizioni; successivamente, i gruppi risultano sfasati, di un valore che aumenta man mano che le ripetizioni si susseguono; infine, i gruppi si riallineano dopo  $12 \cdot 4$  ripetizioni della sequenza base. Maggiori dettagli, ed un estratto di esecuzione, si possono trovare alla pagina <https://www.giorgioguiot.it/clapping-music>.

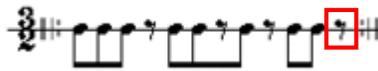


Figura 1. Sequenza base di Clapping Music.

## Analisi matematica

La sequenza può essere rappresentata come una sequenza binaria di battiti, o campioni a tempo discreto, e periodica con periodo 12. Se si considera l'associazione

$$\{\text{croma} \rightarrow +1\}, \quad \{\text{pausa di croma} \rightarrow -1\},$$

si ottiene la seguente sequenza:

$$x[n] = [+1, +1, +1, -1, +1, +1, -1, +1, -1, +1, +1, -1].$$

L'operazione di eliminazione della croma finale, ad opera del gruppo 'B', è equivalente allo sfasamento della sequenza nel tempo di una quantità pari a  $\tau$ , che assume i valori da 0 a 12 al passare del tempo, con un incremento ogni 4 battute. Il gruppo 'A' esegue quindi la sequenza  $x_A[n] = x[n]$ , mentre il gruppo 'B' la sequenza  $x_B[n] = x[n - \tau]$ , ad eccezione del momento in cui si effettua lo sfasamento.

Il risultato musicale finale si può rappresentare come il prodotto tra le due sequenze:

$$y[n] = x_A[n] \cdot x_B[n].$$

Quando  $x_A[n] = x_B[n] = 1$ , ovvero entrambi i gruppi eseguono una croma, oppure quando  $x_A[n] = x_B[n] = -1$ , ovvero entrambi i gruppi eseguono una pausa, allora  $y[n] = +1$ . Quando  $x_A[n] \neq x_B[n]$ , ovvero un gruppo esegue una croma mentre l'altro gruppo una pausa, allora  $y[n] = -1$ .

## Alcuni risultati

Si può dimostrare che la sequenza di *Clapping Music* possiede una serie di proprietà.

### 1) Auto-correlazione

L'auto-correlazione è una misura della similarità di una sequenza con la stessa sequenza sfasata. L'auto-correlazione  $R_x$  della sequenza  $x[n]$  è definita come:

$$R_x[\tau] = \sum_{n=1}^{12} x[n] \cdot x[n - \tau]$$

Dove  $\tau$  è lo sfasamento tra le due sequenze.

È possibile calcolare il valore di  $R_x[\tau]$  per tutti i valori di  $\tau$ , da 0 (sequenze allineate) a 12 (sequenze nuovamente allineate). L'auto-correlazione della sequenza di *Clapping Music* è mostrata in Figura 2. Per migliorare la leggibilità, e senza perdere in generalità, anziché mostrare la correlazione nell'intervallo  $\tau = [0; 12]$  si è scelto di utilizzare l'intervallo  $\tau = [-6; 6]$ . In questo modo è chiaro il comportamento in corrispondenza di  $\tau = 0$ , ovvero quando le sequenze sono allineate. Il risultato è equivalente, per le proprietà di periodicità della sequenza e della struttura musicale del brano.

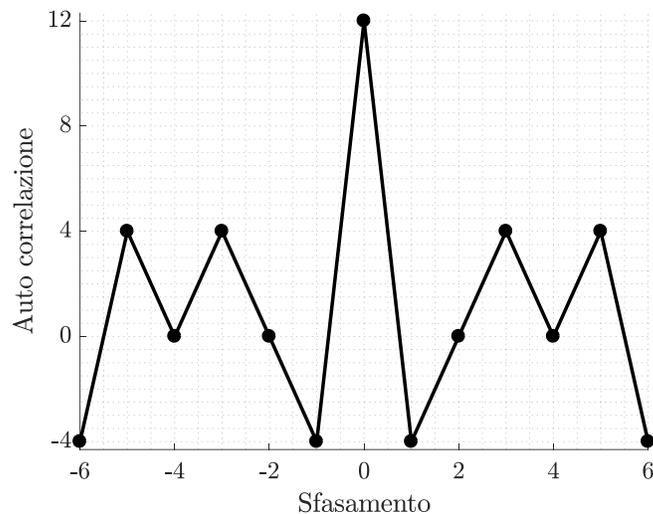


Figura 2. Auto-correlazione della sequenza sequenza base di *Clapping Music*.

Si può notare che l'auto-correlazione ha un picco in corrispondenza di  $\tau = 0$ , ovvero quando le sequenze sono allineate. Il picco vale 12, corrispondente al numero di campioni della sequenza. È interessante notare come gli altri valori:

1. Siano sensibilmente inferiori a 12. Questo si traduce in una minore similarità tra la sequenza originale e quella sfasata.
2. Appartengano a un insieme chiuso  $\{-4, 0, +4\}$ . Questo si traduce in similitudini tra i vari sfasamenti. Alcuni risultano all'orecchio totalmente diversi, altri meno diversi.
3. Godano di una simmetria, rispetto alla situazione in cui le sequenze sono allineate.

## 2) Lunghezza massima di una sequenza identica

Per ogni sfasamento, si può contare la durata della massima sequenza di valori uguali (entrambi i gruppi eseguono una croma o una pausa). Questo corrisponde alla durata del massimo allineamento dei due gruppi. La lunghezza massima chiaramente corrisponde a 12 per  $\tau = 0$ , mentre è inferiore per altri valori. La lunghezza massima di sequenze identiche per tutti gli sfasamenti è riportata in Figura 3. Anche in questo caso si possono notare varie proprietà:

1. Il grafico mostra un picco per  $\tau = 0$ , ovvero quando le sequenze sono allineate.
2. I valori, per  $\tau \neq 0$ , sono inferiori di almeno la metà; questo significa che i due gruppi sono allineati per meno di 6 battiti, quando non sono completamente allineati.
3. Esiste un valore di sfasamento per cui, al massimo, solo un battito è allineato; questo corrisponde al massimo disallineamento delle sequenze, e si verifica per  $\tau = 6$ , ovvero a metà brano.

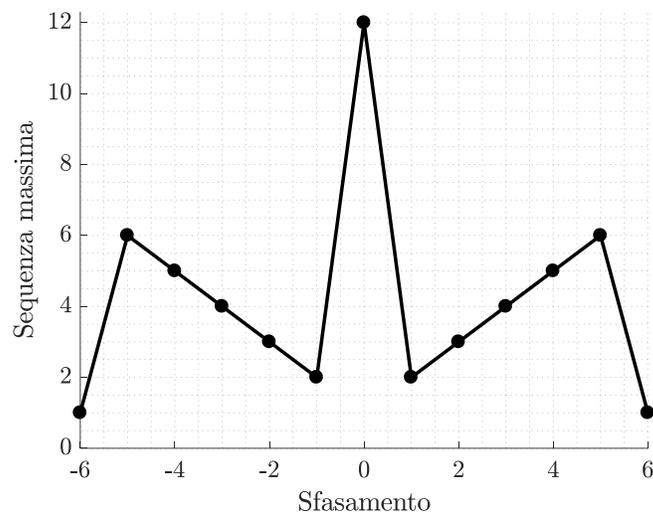


Figura 3. Lunghezza massima di sequenze identiche per vari valori di sfasamento della sequenza base di Clapping Music.

## 3) Numero di pause coincidenti

È possibile contare, per ogni sfasamento, il numero di pause eseguite da entrambi i gruppi. Il risultato è mostrato in Figura 4.

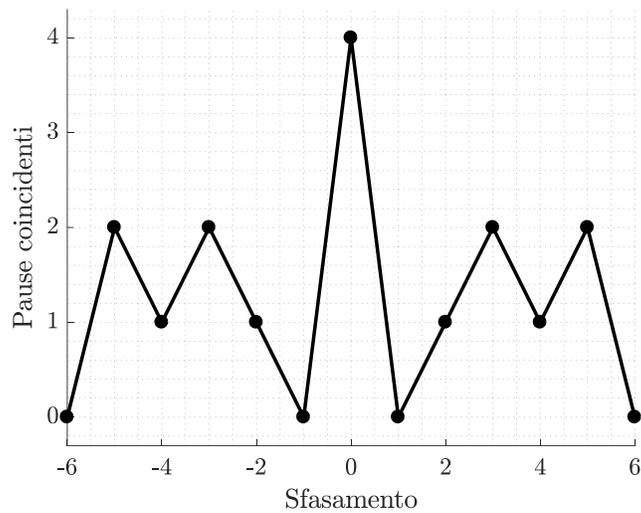


Figura 4. Numero di pause coincidenti per vari valori di sfasamento della sequenza base di Clapping Music.

Anche in questo caso si notano varie proprietà:

1. L'andamento è analogo a quello della auto-correlazione di Figura 2.
2. Chiaramente, per  $\tau = 0$  si ha il massimo numero di pause coincidenti, ovvero 4.
3. Esistono sfasamenti per cui non vi sono pause coincidenti; la conseguenza è la sensazione di continuità di battiti all'orecchio. Questo avviene per  $\tau = 6$ , ovvero a metà brano, e per  $\tau = 1$  e  $\tau = 11$ , ovvero per il primo e per l'ultimo sfasamento.

## Conclusioni

L'analisi matematica di alcune proprietà della sequenza di *Clapping Music* conferma la particolarità di questo brano e la complessità della struttura delle ripetizioni. Tutte le considerazioni hanno infatti un corrispettivo effetto musicale, che rende il brano interessante all'ascolto.